



معادلات دیفرانسیل

مرتبۀ اول

مرتبۀ اول خطی $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ عامل انتگرال‌ساز: $\mu(x) = \exp \int_0^x p(\xi) d\xi$ مشتق: $(\mu y)' = f\mu$ جواب: $y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int f(\xi)\mu(\xi) d\xi + C \right)$	جداشدنی (Separable) $y'(x) = f(x)g(y)$ $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$
غیرکامل $\mu(x, y)(M(x, y) dx + N(x, y) dy) = du(x, y)$ $M_y = N_x$ $N \frac{\partial u}{\partial x} - M \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$ حالت‌های خاص • اگر $\frac{M_y - N_x}{M} = h(y)$ آنگاه $\mu(y) = \exp \int h(y) dy$ • اگر $\frac{M_y - N_x}{N} = -h(x)$ آنگاه $\mu(x) = \exp \int h(x) dx$	کامل $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ شرط: $M_y = N_x$ جواب: $u(x, y) = \text{ثابت}$ که در آن: $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$
مرتبۀ دوم	
ضرایب ثابت $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$ $y(x) = e^{rx} \Rightarrow ar^2 + br + c = 0$ • ریشه‌های مجزا و حقیقی: $r = r_{1,2}, \quad y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ • ریشه‌های حقیقی تکراری: $y_h(x) = (c_1 + c_2 x) e^{rx}$ • ریشه‌های مختلط: $r = \alpha \pm i\beta, \quad y_h(x) = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}$	خطی $a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x)$ $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$



معادلات کوشی-اوایلر (Cauchy-Euler Equations)

$$ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = f(x)$$

$$y(x) = x^r \Rightarrow ar(r-1) + br + c = 0$$

حالت های مختلف

• ریشه های مجزا و حقیقی:

$$r = r_{1,2}, \quad y_h(x) = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$$

• ریشه های حقیقی تکراری:

$$y_h(x) = (c_1 + c_2 \ln|x|)x^r$$

• ریشه های مختلط:

$$r = \alpha \pm i\beta, \quad y_h(x) = (c_1 \cos(\beta \ln|x|) + c_2 \sin(\beta \ln|x|))x^\alpha$$

مسائل غیرهمگن

کاهش مرتبه

• حالت همگن:

برای $y_1(x)$ که در $L[y] = 0$ صدق می کند، جواب مستقل خطی دوم را به صورت $v(x) = v(x)y_1(x)$ بیابید. $z = v'$ یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول جداشدنی است.

• حالت ناهمگن:

برای $y_1(x)$ که در $L[y] = 0$ صدق می کند، جواب $L[y] = f$ را به گونه ای بیابید که $v(x) = v(x)y_1(x)$. معادله $z = v'$ یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است.

روش ضرایب نامعین

$$f(x) \quad y_p(x)$$

$$a_nx^n + \dots + a_1x + a_0 \quad A_nx^n + \dots + A_1x + A_0$$

$$ae^{bx} \quad Ae^{bx}$$

$$a \cos \omega x + b \sin \omega x \quad A \cos \omega x + B \sin \omega x$$

• روش ضرایب نامعین اصلاح شده:

اگر جمله ای در حدس $y_p(x)$ یک جواب برای معادله همگن باشد، آن گاه حدس را در x^k ضرب کنید که k کوچکترین عدد صحیح است به طوری که هیچ جمله ای از $x^k y_p(x)$ جواب مسئله همگن نباشد.

روش تغییر پارامتر

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

$$c'_1(x)y_1(x) + c'_2(x)y_2(x) = 0$$

$$c'_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y'_2(x) = \frac{f(x)}{a(x)}$$

روش های عددی

روش اوایلر

$$y_0 = y(x_0)$$

$$y_n = y_{n-1} + \Delta x f(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad n = 1, \dots, N$$

جواب‌های سری

روش تیلور	سری‌های توانی
۱. چند بار از معادله دیفرانسیل مشتق بگیرید. ۲. شرایط اولیه را اعمال کنید. ۳. ضرایب تیلور را محاسبه کنید. ۴. ضرایب را در فرم سری $y(x)$ قرار دهید.	۱. تساوی زیر را در نظر بگیرید. $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ ۲. $y'(x)$ و $y''(x)$ را بیابید. ۳. بسط سری را در معادله دیفرانسیل قرار دهید. ۴. جملات مشابه را با هم جمع کنید. ۵. رابطه بازگشتی را پیدا کنید. ۶. با جایگذاری سری در معادله $y(x)$ ضرایب را به دست آورید.
نقاط معمولی و تکین	روش فروبنیوس (Frobenius Method)
$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ در معادله بالا، x_0 یکی از نقاط زیر است: - نقطه معمولی است اگر $a(x)$ و $b(x)$ در بازه $x - x_0 < R$ حقیقی تحلیلی باشند. - نقطه تکین منظم است اگر $a(x)$ و $b(x)$ حول $x = x_0$ سری تیلور همگرا حول $x = x_0$ داشته باشند. - نقطه تکین نامنظم است اگر معمولی یا تکین منظم نباشد.	۱. تساوی $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^{n+r}$ را در نظر بگیرید. ۲. معادله مشخصه $r(r-1) + a_0 r + b_0$ را به دست آورید. ۳. رابطه بازگشتی را براساس نوع ریشه‌های معادله مشخصه پیدا کنید. ۴. ضرایب را محاسبه کنید و در سری $y(x)$ قرار دهید.

تبدیل لاپلاس

تبدیل‌های مهم	ویژگی‌های تبدیل لاپلاس
c e^{at} t^n $\sin \omega t$ $\cos \omega t$ $\sinh at$ $\cosh at$ $H(t-a)$ $\delta(t-a)$	$\frac{c}{s}$ $\frac{1}{s-a}, s > a$ $\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$ $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ $\frac{a}{s^2 - a^2}$ $\frac{s}{s^2 - a^2}$ $\frac{e^{-as}}{s}, s > 0$ $e^{-as}, a \geq 0, s > 0$
	$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s)$ $\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$ $\mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ $\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$ $\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-u)g(u) du\right] = F(s)G(s)$



حل مسائل مقدار اولیه

۱. با اعمال شرایط اولیه از معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس بگیرید.

۲. معادله را برای $Y(s)$ حل کنید.

۳. با استفاده از عکس تبدیل لاپلاس و گسترش کسره‌های جزئی، $y(t)$ را به دست آورید.

توابع خاص

توابع بسل (Bessel Functions)

$$J_p(x), N_p(x)^2$$

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0.$$

چندجمله‌ای‌های لژاندر (Legendre Polynomials)

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad |x| \leq 1, |t| < 1.$$

توابع گاما (Gamma Functions)

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل

فرم ماتریسی

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv AX$$

حدس اولیه:

$$X = Ve^{\lambda t} \Rightarrow AV = \lambda V$$

دستگاه معادلات مسطح (Planar System)

$$x' = ax + by$$

$$y' = cx + dy$$

$$x'' - (a+d)x' + (ad-bc)x = 0$$

جواب‌های ماتریسی

۱. تساوی $x' = Ax$ را در نظر بگیرید.

۲. مقادیر ویژه λ_i را بیابید.

۳. بردارهای ویژه $v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{pmatrix}$ را بیابید.

۴. جواب ماتریس اساسی را تشکیل دهید:

$$\Phi = \begin{pmatrix} v_{11}e^{\lambda_1 t} & v_{21}e^{\lambda_2 t} \\ v_{12}e^{\lambda_1 t} & v_{22}e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

۵. جواب عمومی:

$$X(t) = \Phi(t)C$$

۶. C را بیابید:

$$X_0 = \Phi(t_0)C \Rightarrow C = \Phi^{-1}(t_0)X_0$$

مقدار ویژه

$$AV = \lambda V$$

مقادیر ویژه را بیابید:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

بردارهای ویژه $(A - \lambda I)V = 0$ را برای هر λ بیابید.

حالت‌های مختلف:

• مقادیر ویژه مجزا:

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2$$

• مقادیر ویژه تکراری:

$$X(t) = c_1 e^{\lambda t} V_1 + c_2 e^{\lambda t} (V_2 + tV_1)$$

که در آن، $AV_2 - \lambda V_2 = V_1$.



۷. جواب خصوصی: $X(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0$ ۸. جواب ماتریس اصلی: $\psi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ ۹. جواب خصوصی: $X(t) = \psi(t)X_0$ نکته: $\psi' = A\psi, \quad \psi(t_0) = I$	• مقادیر ویژه مزدوج مختلط: $X(t) = c_1 \operatorname{Re}(e^{at}(\cos \beta t + i \sin \beta t)V) + c_2 \operatorname{Im}(e^{at}(\cos \beta t + i \sin \beta t)V)$ رفتار پاسخ: • گره پایدار: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ • گره ناپایدار: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ • نقطه زینی: $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ • مرکز: $\lambda = i\beta$ • کانون پایدار: $\lambda = \alpha + i\beta, \alpha < 0$ • کانون ناپایدار: $\lambda = \alpha + i\beta, \alpha > 0$
جواب های ماتریس غیرهمگن $X(t) = \Phi(t)C + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds$ $X(t) = \psi(t)X_0 + \psi(t) \int_{t_0}^t \psi^{-1}(s)f(s)ds$ معکوس ماتریس 2×2: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$	

مجموعه آموزش های ریاضی فرادرس (+کلیک کنید)

برای مشاهده دیگر «تقلب نامه های» مجله فرادرس، به [این لینک](#) مراجعه فرمایید.

جهت آگاهی از آخرین تقلب نامه های منتشر شده، در [کانال تلگرام](#) مجله فرادرس عضو شوید.

تهیه و تنظیم: مجله فرادرس

